1. K^4+64, K - бүтін сан, түріндегі жай сан табыла ма?

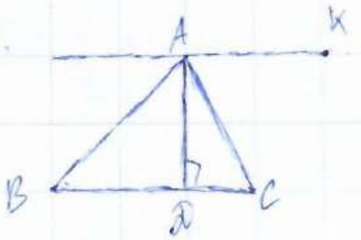
$K^4+64=(k^2)^2+8^2=(k^2+8)^2-2\cdot k^2\cdot 8=(k^2+8)^2-16k^2=(k^2+8)^2-(4k)^2=(k^2+8-4k)(k^2+8+4k)=$

$=(k^2-4k+4+4)(k^2+4k+4+4)=((k-2)^2+4)((k+2)^2+4)$

$(k-2)^2>0$, $(k-2)^2+4>4$

k^4+64 сандар екі оң бүтін сандардың көбейтіндісі түрінде жаздық. Демек K^4+64-құрама сан, жай сан емес.

2.



$\triangle ABC$

$BC=2\cdot AD$

$\angle A$-доғал?

A төбесі арқылы BC табанына ∥ AK түзу өткіздік, егер A нүктені AK түзу бойымен жылжытсақ, сонда A бұрышы 0-ден 90°-қа дейін, келесі 90°-тан 0-ге дейін өзгереді. Демек, A бұрышы доғал болуы мүмкін емес. (D нүкте A нүктемен бірге BC қабырға бойымен жылжиды, егер D, BC-ның ортасы болса онда $\angle A$ бұрышы 90°-тең).

3. $x+y+z=a+1$

$xy+xz+yz=2a$

$xyz=a$

Теңдеу құрастырамыз $(t-x)(t-y)(t-z)=(t-x)(t^2-yt+yz-tz)=t^3-t^2y+tyz-t^2z-xt^2+$

$+xyt-xyz+xzt=t^3-t^2\cdot(a+1)+t(2a)-a$

$t^3-t^2(a+1)+2at-a=0$

Осы теңдеуге кем дегенде 3 түбірі болуы қажет. Осы тұрғыдан a параметрі білгенміз керек. Егер $a=0$, онда нүктесінің шешімі болмайды.

1-тапсырма.

$a^3 = b^3 - c^3$

$(b_c + a^2)x - (ab + b) + c - 3abc$

$(bc + a^2)a - (ac + b^2)b + (ab + c^2) = c - 3abc + ab^3 + c^3 = 3abc$ [illegible] $= 3abc$.

2-тапсырма.

$N \in BC$.

$\triangle BLN = \triangle ABL$.

$\frac{BN}{AB} = \frac{AL}{BC}$

$\frac{BN}{2x} = \frac{BH}{AL}$

$\frac{BH + x}{2x} = \frac{AK}{KC} = 1$

$BN = x$.

$\frac{x}{2x} = \frac{KL}{LA}$

$AL = 2BL$

$S_{HLD} = 4S_{BNL}$

$S_{BNL} + S_{ALD} = \frac{S_{ABL}}{2} + S_{ALD} = \frac{S_{ALB}}{4}$

$S_{ALD} = 14$

$S_{KNL} = 1$.

$2(1 + S_{ABKC}) + (4 - 1 - S_{ABKC}) + 3\, S_{LKC} = 9$.

3-тапсырма.

$$\begin{cases} \frac{5}{x + xy} + \frac{4}{y + xy} = \frac{13}{6} \\ \frac{5}{x + xy} - \frac{4}{y + xy} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30y + 24x = 13xy(x + y). \\ 8y + x = x(xy \end{cases}$$
(-13)

$30y - 24x = 13xy(x + y)$
$-104y - (74)$.
$-\cancel{10} - 3\cancel{0} - 6 \Rightarrow x)$

$6 = xy(3 - y)$.

$y = 1$.

$y = 1 \quad x = -2$

$y = -1 \quad x = 2$.

Жауабы: $x = 2 \quad y = 1$
$x = -2 \quad y = -1$.

1) $a^3=b^3-c^3$

$(bc+a^2)a-(ac+b^2)b+(ab+c^2)c=3abc$

$(bc+a^2)a-(ac+b^2)b+(ab+c^2)c=3abc+a^3-b^3+c^3=$

$=3abc+a^3-(b^3-c^3)=3abc$

2)

$\angle b$ сызса, $\triangle BLN$ ұшб. қарамыз

$N\in BC$

$\triangle BLN=\triangle ABL$

$\frac{BN}{AB}=\frac{BL}{AC}$

$\frac{BN}{2}=\frac{BL}{AL}$

$\frac{BN+x}{2x}=\frac{AK}{KC}=1$

$BN=x$

$BN=x$

$\frac{x}{2x}=\frac{KL}{AL}$

$AL=2BL$

$S_{aLD}=4\cdot S_{BNL}$

h_1, h_2 $\triangle NBL$ және $\triangle ALb$ ұшб

$S_{BNL}+S_{aLD}=\frac{6-S_{aLD}}{2}+S_{aLt}=\frac{5S_{aLD}}{4}$

$S_{aLb}=4$

$S_{BNL}=1$

$2(1+S_{BLKC})+(4-1=S_{BLKC})+3_{BLKC}=9$

$S_{ABCD}=\frac{3x\cdot(h_1+h_2)}{2}=9$

$S_{BNL}+S_{aLD}=\frac{xh_1}{2}+x_2h$

$S_{BKLC}=2$

3)

$\begin{cases}\frac{5}{x^2+xy}+\frac{4}{y^2+xy}=\frac{13}{6}\\ \frac{8}{x^2+xy}=\frac{1}{y^2+xy}\end{cases}=1$

$\begin{cases}36y+24x=13a(x+4)\\ 8y+x\,a\,x-y\end{cases}$

$30y-24x=13a(x+y)$

$-104y-(24x$

$10\cdot36\cdot6>x^2$

$6=xy\cdot(x-y)$

$y=1$ $x=-2$

$y=1$

$y=1$ $x=2$

жауабы $x=2$ $y=1$

$x=-2$ $y=-1$

2 Тапсырма. Шешуі

$(a+1)-4a=(a-1)^2=0$

$(a+1)^2=4a$

$(b+1)^2>4b$

$\left(\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\right)>\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$\left(\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{b+1}{a}\right)\geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\cdot 2=8$

3 Тапсырма.

Таңдалмайтын ақ шаршыны іріктеп алайық. Әрбір жол мен бағанда 4 ақ шаршы бар екені белгілі. Әрбір жолдан және әрбір бағаннан 1 ден артық ақ шаршы алып тасталынбайды

1-ші жолдан ақ түсті шаршыны алып тастау мүмкіндігі 4-ке тең

2-ші жолдан алып тасталынатын ақ шаршы 1 ші жолдағы алып тасталған ақ шаршы бағанында болмау керек. 2 ші жолда мұндай мүмкіндік саны - 4.

3-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 3 тең болады. Себебі 1-ші жолда алынған бір бағанға кемиді!

4-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 3 тең болады. Себебі 2 ші жолда алынған бір бағанға кемиді

5-ші жолда әртүрлі мүмкіндік 2 тең болады. себебі 1 ші және 3 ші жолдардағы 2 бағанға кемиді

6-шы жолда әртүрлі мүмкіндік сан 2 тең болады себебі 2 ші және 4-ші жолдардағы 2 бағанға кемиді!

7 ші жолда әртүрлі мүмкін саны 1 тең болады себебі 1 ші, 3 ші және 5 ші жолдардағы 3 бағанға кемиді!

8-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 1-ге тең болады. Себебі 2-ші, 4-ші және 6-шы жолдардағы 3 бағанға кетеді.

Сонымен жалпы мүмкіндіктер саны $4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1=576$.

Жауабы: 576.

1-тапсырма

$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x,\ x\neq0\quad x\neq1$

Шешуі:

$x=\frac{1}{1-z}\quad(z\neq0,\ z\neq1)$

$F=\left(\frac{1}{1-z}\right)+F(z)=\frac{2-z}{1-z}$

$x=\frac{y-1}{y}\quad(y\neq0,\ y\neq1)$

$F\cdot\left(\frac{y-1}{y}\right)+F\cdot\left(\frac{1}{1-y}\right)=\frac{2y-1}{y}$

(1), (2) өрнектегі y, z-ті x-ке ауыстырып жүйе құрамыз.

$$\begin{cases} F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \\ F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x} \\ F\left(\frac{1}{1-x}\right)+F(x)=\frac{2-x}{1-x} \end{cases}$$

$F\left(\frac{x-1}{x}\right), F\left(\frac{1}{1-x}\right)$ - терді алмастсақ. $F(x)=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}$ шығады.

2-тапсырма. Шешуі:

$(a+1)-4a=(a-1)^2=0$

$(a+1)^2=4a$

$(b+1)^2>4b$

$$\left(\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\right)>\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$\left(\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{b+1}{a}\right)\geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4\cdot 2=8$$

3-тапсырма. Шешуі.

Таңдалынатын ақ шарларды іріктеп алайық. Әрбір жолдың әрбір бағанда 4 ақ шарлар бар екені белгілі. Әрбір жолда және әрбір бағаннан 1-ден артық ақ шарды алып тастамайды.

1-ші жолда ақ түсті шарларды алып тастау мүмкіндігі 4-ке тең 2-ші жолдан алып тасталынатын ақ шары, 1-ші жолдан алып тасталған ақ шарлар бағанында болуы керек. 2-ші жолда осындай мүмкіндік саны - 4.

3-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 3 тең болады Себебі 1-ші жолда алынған бір бағанға кеміді.

4-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 3 тең болады. Себебі 2-ші жолда алынған бір бағанға кеміді.

5-ші жолда әртүрлі мүмкіндік саны 2 тең болады. Себебі 1-ші және 3-ші жолдардағы 2 бағанға кеміді.

6-шы жолда әртүрлі мүмкіндік саны 2 тең болады. Себебі 2-ші және 4-ші жолдардағы 2 бағанға кеміді.

7-ші жолда әртүрлі шешімінің саны 1-ге тең болады. Себебі 1-ші, 3-ші және 5-ші жолдардағы 3 бағанға кетеді. 8-ші жолда әртүрлі шешімінің саны 1-ге тең болады. Себебі 2-ші, 4-ші және 6-шы жолдардағы 3 бағанға кетеді. Сонымен жалпы шешімдіктер саны $4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1 = 576$. Жауабы: 576.

1-тапсырма Шешуі:

$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x,\ x \neq 0,$

$x \neq 1;\quad F(x) = ?$

Шешуі: $x = \frac{1}{1-z}$ $(z \neq 0, z \neq 1)$ деп алып, орнына қоямыз,

$F\left(\frac{1}{1-z}\right) + F(z) = \frac{2-z}{1-z}.$

$x = \frac{y-1}{y}$ $(y \neq 0, y \neq 1)$ деп алып, орнына қоямыз,

$F\left(\frac{y-1}{y}\right) + F\left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{2y-1}{y}$

$$\begin{cases} F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \\ F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2x-1}{x} \\ F\left(\frac{1}{1-x}\right) + F(x) = \frac{2-x}{1-x} \end{cases}$$

$F\left(\frac{x-1}{x}\right)$, $F\left(\frac{1}{1-x}\right)$ -терді аластасақ $F(x) = \frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}$ шығады.